PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: FMUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Nechť $a, b \in (0, +\infty)$. Definujme funkci

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Spočtěte:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Vysvětlete svá řešení.

Úloha 2 (20 bodů)
Ať $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| \leq \sin z, z \in (0, \pi)\}$. Spočtěte

$$\int_M (5x + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Úloha 3 (20 bodů)
Podle Bohrova modelu atomu vodíku se elektron pohybuje kolem jádra po kružnicové trajektorii o poloměru r se středem v jádru. Hmotnost m_e a náboj e elektronu znáte. Určete:

(a) Proud I, který představuje pohybující se elektron.
(b) Velikost momentu hybnosti L, který je spojen s pohybem elektronu po této kružnici.
(c) Velikost magnetického momentu μ, který je spojen s pohybem elektronu po této kružnici (tzv. orbitální mag. moment elektronu).
(d) Na základě předchozího výpočtu ověřte, že velikost gyromagnetického poměru $|\gamma|$ je $\frac{e}{2m_e}$.

Úloha 4 (20 bodů)
Ocelovou kuličku (o hmotnosti m a hustotě ϱ) položíme do viskózní kapaliny o hustotě $\varrho_k < \varrho$ tak, aby byla celá ponořena pod hladinou. V čase $t_0 = 0$ kuličku pustíme. Jestliže je velikost odporové síly F_o působící proti směru pohybu kuličky přímo úměrná velikosti rychlosti kuličky, určete:

(a) Terminální (maximální) rychlost kuličky v_m.
(b) Časový průběh velikosti rychlosti kuličky $v(t)$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2022

Studijní program: FMUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Pro $x > 0$ platí:

$$\max\{a,b\}2^{-\frac{1}{x}} \leq f(x) \leq \max\{a,b\}.$$

Z věty o dvou policistech a $\lim_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$ plyne, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \max\{a,b\}.$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{-x=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^y+\left(\frac{1}{b}\right)^y}{2}\right)^{\frac{1}{y}}} \overset{(a)}{=}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}} = \min\{a,b\}.$$

(c) Ze spojitosti exponenciely a věty o limitě složené funkce plyne, že $\lim_{x\to 0} f(x) = e^A = \sqrt{ab}$, kde

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} \overset{\text{l'Hospital } \frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Úloha 2 (20 bodů)

Využitím symetrie množiny M dostáváme

$$\int_M (5x+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_M 5x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $N = M \cap \{(x,y,z) : y \geq 0, x \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty a následnou substitucí dostáváme

$$\begin{aligned}
4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 4\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z}\left(\int_0^{\sin z - y} y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= 4\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin z} (\sin z - y)y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= 4\int_0^\pi \left[\frac{1}{2}y^2\sin z - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sin z}\mathrm{d}z = 4\int_0^\pi \left(\frac{1}{6}\sin^3 z\right)\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\int_0^\pi \left(\sin z(1-\cos^2 z)\right)\mathrm{d}z = -\frac{2}{3}\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{2}{3}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_1^{-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Úloha 3 (20 bodů)

(a) Vyjdeme z definice proudu, za náboj dosadíme náboj elektronu e a za čas jednu periodu T jeho oběhu kolem jádra:

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r},$$

kde v je rychlost elektronu na kruhové trajektorii. Tuto rychlost určíme z úvahy, že roli dostředivé síly při tomto pohybu hraje coulombovská síla mezi elektronem a kladně nabitým jádrem vodíku:

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{k}{m_e r}},$$

kde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Dosazením do prvního vztahu získáme:

$$I = \frac{e^2}{2\pi r}\sqrt{\frac{k}{m_e r}}.$$

(b) Velikost momentu hybnosti určíme jako

$$|\vec{L}| = rm_e v = rm_e e\sqrt{\frac{k}{m_e r}} = e\sqrt{rm_e k}.$$

(c) V Bohrově pojetí atomu vytváří pohybující se elektron kruhovou proudovou smyčku vymezující plochu S, jejíž magnetický moment μ (přesněji jeho velikost) je dán jako

$$|\vec{\mu}| = IS = \frac{e^2}{2\pi r}\sqrt{\frac{k}{m_e r}}\pi r^2 = \frac{1}{2}e^2\sqrt{\frac{kr}{m_e}}.$$

(d) Velikost gyromagnetického poměru $|\gamma|$ je rovna:

$$|\gamma| = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}|} = \frac{\frac{1}{2}e^2\sqrt{\frac{kr}{m_e}}}{e\sqrt{rm_e k}} = \frac{e}{2m_e}.$$

Úloha 4 (20 bodů)

Než se pustíme do řešení jednotlivých částí, provedeme úvahy o silách působících na kuličku. Na počátku pohybu je odporová síla $\vec{F_o}$ nulová, na kuličku tedy působí pouze tíhová síla $\vec{F_G}$ a vztlaková síla $\vec{F_v}$, jejichž výslednice míří – s ohledem na zadané hustoty – svisle dolů. S rostoucí rychlostí kuličky směrem dolů roste přímo úměrně také velikost odporové síly F_o. Pro aktuální zrychlení kuličky je tedy podstatná výslednice všech tří sil – napíšeme pro ně tedy pohybovou rovnici (2. Newtonův zákon):

$$m\vec{a} = \vec{F_G} + \vec{F_v} + \vec{F_o}.$$

Jde o jednorozměrný problém, proto s ohledem na směry jednotlivých sil přejdeme do skalárního zápisu:

$$ma = F_G - F_v - F_o.$$

Nyní dosadíme za velikosti jednotlivých sil – vztahy pro tíhovou a vztlakovou sílu jsou triviální, velikost odporové síly vyjádříme jako $F_o = Kv$, kde K je kladná konstanta. Dostáváme:

$$ma = mg - V\varrho_k g - Kv,$$

kde V je objem kuličky a a její zrychlení.

(a) Určeme nyní terminální rychlost v_m. Pokud jí kulička dosáhne, je její zrychlení nulové a platí:

$$0 = (m - V\varrho_k)g - Kv_m \;\Rightarrow\; v_m = \frac{(m - V\varrho_k)g}{K}.$$

(b) Dále nalezneme časový průběh velikosti rychlosti. Zrychlení nyní vyjádříme jako časovou derivaci rychlosti ($\frac{dv}{dt}$), čímž získáváme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = \frac{(m - V\varrho_k)g}{m}.$$

Nejdříve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici, která má tvar:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = 0.$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru $v_{\mathrm{hom}}(t) = v_0 e^{\alpha t}$, které dosadíme:

$$\alpha v_0 e^{\alpha t} + \frac{K}{m}v_0 e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha = -\frac{K}{m}.$$

Dále nalezneme alespoň jedno partikulární řešení původní nehomogenní rovnice. Zřejmě je nejjednodušší volit takové řešení v_{part}, ve kterém rychlost nezávisí na čase, čímž z rovnice vypadává časová derivace a řeší ji výraz

$$v_{\mathrm{part}} = \frac{1}{K}(m - V\varrho_k)g.$$

Celkové řešení je potom

$$v(t) = v_{\mathrm{hom}} + v_{\mathrm{part}} = v_0 e^{-\frac{K}{m}t} + \frac{1}{K}(m - V\varrho_k)g.$$

Protože $\frac{1}{K}(m - V\varrho_k)g = v_m$, můžeme výsledek přepsat jako

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{K}{m}t} + v_m.$$

Vztah mezi v_0 a v_m určíme z počáteční podmínky $v(0) = 0$:

$$0 = v_0 + v_m \Rightarrow v_0 = -v_m.$$

Finální řešení má tedy podobu:

$$v(t) = v_m \left(1 - \exp\left(-\frac{K}{m}t\right)\right).$$